SUBJECT: 3/12

الدوال والحقول المتجهية:

تعريف: الدالة المتجهة:

لتكن $X \subseteq R$، نقول أن لدينا دالة متجهة $\vec{F}(t)$ معرفة على X، إذا وجد مقابل لكل عدد $t \in X$ متجه محدد $\vec{F}(t)$.

$$F: X \longrightarrow \vec{R}^3$$
$$t \longrightarrow \vec{r}(t)$$

الآن إذا فرضنا أن $[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ مركبات الدالة $\vec{F}(t)$ على X بالنسبة لجملة محاور احداثية $oxyz$ حيث $f_1(t)$ و، $f_2(t)$، $f_3(t)$ دالة عددية معرفة على X، عندئذٍ نكتب الدالة المتجهية بالشكل:

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\cdot\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$، $\vec{j}$، $\vec{k}$ متجهات الواحدة على المحاور الاحداثية أو نكتب بالشكل:

$$\vec{F_1}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

مثال: الدالة المتجهة:

$$F(t) = a\cdot\cos t\,\vec{i} + a\cdot\sin t\,\vec{j}$$

حيث $t \in [0, 2\pi]$

تمثل مجموعة متجهات بدايتها النقطة O في المستوي xoy ونهايتها ترسم دائرة.

- إن العمليات الجبرية والمتجهية على الدوال المتجهية تشبه العمليات على المتجهات.

★ **طويلة الدالة المتجهة:**

لتكن $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ دالة متجهة معرفة على X نعطي طويلة الدالة $\vec{F}(X)$ بالمقدار الموجب التابع لـ t قد تكون ثابتة أو متغيرة.

$$|\vec{F}(t)| = \sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^3}$$

في المثال السابق نلاحظ أن

$$|\vec F(t)| = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t + \sin^2 t} = \alpha = const$$

مثال: إذا كانت

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$$
$$G(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

فإن:

$$F(t) + G(t) = [f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), f_3(t) + g_3(t)]$$

$$\vec F(t) \cdot \vec G(t) = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + f_3 \cdot g_3$$

$$\vec F(t) \cdot \vec G(t) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

ملاحظة: إن مفهوم الارتباط والاستقلال الخطي لعدة دوال متجهة يعرف بصورة مشابهة؛ إن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدوال المتجهة:
$F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ مرتبطة خطياً
$$\vec F(t) \cdot (\vec G(t) \times \vec H(t)) = 0$$

تعريف: نهاية دالة متجهة:

لتكن $\vec F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ معرفة على $X \subseteq R$ نقول إن الدالة $\vec F(t)$ نهايتها تساوي المتجه $\vec A$ عندما $t \to t_0$ ونكتب:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = A$$

من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لكل $0 < |t - t_0| < \delta$ فإن
$$|\vec F(t) - \vec A| < \varepsilon$$

إذا كان $\vec A = (a_1, a_2, a_3)$ ذلك يعني أن:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{A} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \to t_0} f_1(t) = a_1 \\ \lim_{t \to t_0} f_2(t) = a_2 \\ \lim_{t \to t_0} f_3(t) = a_3 \end{cases}$$

ملاحظة: العمليات على نهايات الدوال تشبه العمليات على نهايات الدوال الحقيقية.

مثال: إذا كانت

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{A} \ , \ \lim_{t \to t_0} \vec{G}(t) = \vec{B}$$

و $h(t)$ دالة سلمية فإن:

$$\lim_{t \to t_0} (\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)) = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\lim_{t \to t_0} (\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)) = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\lim_{t \to t_0} (\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)) = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\lim_{t \to t_0} (h(t) \cdot \vec{F}(t)) = m \cdot \vec{A}$$

تعريف: استمرار دالة متجهة:

لتكن $\vec{F}(t)$ دالة متجهة معرفة على X نقول أن الدالة $F(t)$ مستمرة في $X \to t_0$

إذا كانت:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \vec{F}(t_0)$$

ونقول أن $F(t)$ مستمرة على X إذا كانت مستمرة في كل نقطة $t \in X$.

مثال: الدالة المتجهة:

$$F(t) = e^{-t} \sin t \cdot \vec{i} + t \cdot \ln t \cdot \vec{j} - \cos t \, \vec{k}$$

مستمرة لكل $t > 0$

اشتقاق الدالة المتجهة:

لتكن $\vec{F}(x)$ دالة معرفة ومستمرة على $x \subseteq R$ نقول أن الدالة $\vec{F}(t)$ مشتقة في النقطة $t_0 \in x$ ونرمز لها بـ $\vec{F}'(t_0)$ إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t_0+\Delta t)-\vec{F}(t_0)}{\Delta t}$$

نفرض: وأن $\vec{F}=(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ $\quad F'(t)=(f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x))$

أن العلاقة الأخيرة تكافئ تحقق الشروط:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = f_1'(t_0)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_2(t_0+\Delta t)-f_2(t_0)}{\Delta t} = f_2'(t_0)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_3(t_0+\Delta t)-f_3(t_0)}{\Delta t} = f_3'(t_0)$$

بمعنى آخر لإيجاد مشتقة دالة متجهة يكفي أن نجد مشتقات مركباتها على الترتيب

$$\vec{F}'(t) = F_1'(t)\vec{i} + F_2'(t)\vec{j} + F_3'(t)\vec{k}$$

ملاحظة: إن قواعد اشتقاق الدوال المتجهة تشبه قواعد اشتقاق الدوال الحقيقية. تتعلق الدالة المتجهة بالجهة والطول.

نتائج هامة:

1) الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة المتجهة $\vec{F}(t)$ ثابتة الطول ومتغيرة الجهة أن تعامد مشتقتها.

الإثبات:

نفرض $\vec{F}(t)$ تعامد مشتقتها هذا يكافئ $\vec{F}(t)$ لكل $t \in x$ $\vec{F}(t).\vec{F}'(t)=0$

هذا يكافئ $2F(t).F'(t)=0$ هذا يكافئ $(\vec{F}(t).\vec{F}(t))'=0$ هذا يكافئ $(|\vec{F}(t)|^2)'=0$

أي أن $|\vec{F}(t)|=const$ (أي $F(t)$ ثابت الطول) وهو المطلوب

4. الشرط اللازم و الكافي كي تكون الدالة المتجهة ثابتة الجهة ومتغيرة الطول هو أن توازي مشتقتها.

الإثبات: لتكن $\vec{F}(t)$ دالة ثابتة الجهة ، عندئذٍ يمكن كتابة الدالة $\vec{F}(t)$ بالشكل :

$$\vec{F}(t) = f(t).\vec{k}$$

حيث $f(t) = |\vec{F}(t)|$

$\vec{k}$ متجه واحدة له منحى $\vec{F}(t)$ باعتبار أن $\vec{F}(t)$ ثابتة الجهة فإن $\vec{k}$ متجه ثابت بالجهة والطول

فإن $\vec{k}' = 0$

ومنه:

$$\vec{F}'(t) = (f(t).\vec{k})' =$$
$$= f'(t).k + f(t).\vec{k}' = f(t).\vec{k}$$

مما سبق نلاحظ أن $\vec{F} \parallel \vec{F}'(t)$

(لهما منحى مشترك هو $\vec{k}$)

ملاحظة:

$$\vec{F}(t) = a.\cos t\ \vec{i} + a.\sin t\ \vec{j}$$
$$= a(\cos t + \sin t)$$
$$a = |F(t)|$$

متجهة واحدة لها منحى F

وبالعكس: لنفرض أن $\vec{F} = f(t).\vec{k}$

ونفرض أن $\vec{F} = f(t).\vec{k}$ ($\vec{k}$ متجه واحدة).

- الآن إذا كان $\vec{k}$ ثابت الجهة فإن $\vec{F}(t)$ ثابتة الجهة .
- أما إذا لم يكن $\vec{k}$ ثابت الجهة (لنفرض جدلاً أن k متغير الجهة).

عندئذٍ:

$$\vec{F}'(t) = (f(t).\vec{k})' = f'(t).\vec{k} + f(t).\vec{k}'$$

ومنه

$$\vec{F}(t) \times \vec{F}(t)' = f(t).\vec{k} \times (f'(t).\vec{k} + f(t).\vec{k})$$
$$= f(t)^2.(\vec{k} \times \vec{k}) = 0$$

لأن $(\vec{F} \parallel \vec{F}')$

وباعتبار $f(t) \neq 0$ يكون:

$$\vec{k} \times \vec{k}' = 0$$

لتكن k متجه الواحدة ثابت الطول المتغير الجهة ، حسب النتيجة ① يكون: $k.k' = 0$ $(k \perp k')$

وهنا يتناقض أنه أن k ثابت الجهة أو أن نقول من (1) و (2) $\vec{k}' = 0$ (k ثابت الطول والجهة).